КАЗАХСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ АЛЬ-ФАРАБИ

ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА ТЕПЛОФИЗИКИ И ТЕХНИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

3D моделирование физических процессов

Исследование устойчивости неявной схемы

Лектор: PhD
Максимов Валерий Юрьевич

ИССЛЕДОВАНИЕ УСТОЙЧИВОСТИ НЕЯВНОЙ СХЕМЫ

Рассмотрим отдельно уравнение конвективного переноса и уравнение диффузии. Будем исследовать устойчивость методом фон Неймана

1) Уравнение конвекции:

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} = 0$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} + \frac{c}{2}\left(f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}\right) = 0$$

$$f_{i,n} = V_n e^{Ii\theta}$$

$$V_{n+1}e^{Ii\theta} - V_n e^{Ii\theta} + \frac{c}{2}\left(V_{n+1}e^{I(i+1)\theta} - V_{n+1}e^{I(i-1)\theta}\right) = 0$$

$$V_{n+1} - V_n + \frac{c}{2}V_{n+1}\left(e^{I\theta} - e^{-I\theta}\right) = 0$$

$$V_{n+1}\left(1+cI\sin\theta\right)=V_n$$

$$\left|G\right|=\left|\frac{1}{1+cI\sin\theta}\right|=\left|\frac{1-cI\sin\theta}{1+c^2\sin^2\theta}\right|\le 1$$

$$G=\frac{1+c^2\sin^2\theta}{\left(1+c^2\sin^2\theta\right)^2}=\frac{1}{1+c^2\sin^2\theta}\le 1$$

$$1\le 1+c^2\sin^2\theta\Rightarrow c^2\sin^2\theta\ge 0$$ при $\forall$ С

Т.о. для полностью неявный схемы $\left|G\right|\le 1$ независимо от величины *С.* Данная схема абсолютно устойчива, что дает возможность вести расчеты с произвольно большим шагом по времени, а это является большим преимуществом.

2) Уравнение диффузии

$$\frac{f_{i.n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} = a\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{\Delta x^2}$$

$$f_{i,n+1} - f_{i,n} = d\left(f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}\right)$$

$$V_{n+1}e^{Ii\theta} - V_n e^{Ii\theta} = d\left(V_{n+1}e^{I(i+1)\theta} + V_{n+1}e^{I(i-1)\theta} - 2V_{n+1}e^{Ii\theta}\right)$$

$$V_{n+1} - V_n = dV_{n+1}\left(e^{I\theta} + e^{-I\theta} - 2\right)$$

$$V_{n+1}\left[1 - 2d(\cos\theta - 1)\right] = V_n$$

$$G = \frac{1}{1 + 2d\left(1 - \cos\theta\right)}$$

т.к. $\cos\theta \le 1 \Rightarrow \quad \left|G\right| \le 1 \quad \textit{для} \quad \forall d$

Т.о. полностью неявная конечно-разностная схема для уравнения диффузии также является абсолютно устойчивой.

Другие неявные схемы

В общем случае пространственные производные могут быть представлены следующем образом:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_i = \lambda \frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{2\Delta x} + (1-\lambda)\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{2\Delta x}$$

$$\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_i = \lambda \frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2 f_{i,n+1}}{\Delta x^2} + (1-\lambda)\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2 f_{i,n}}{\Delta x^2}$$

λ є [0;1] -весовой коэффициент.

Говорят, что пространственные производные определяются взвешенным средним центральных разностных производных в моменты времени *n* и *n+1* .

При $\lambda = 0$ - явная КРС

$\lambda = 1$ - полностью неявная КРС

$\lambda = \frac{1}{2}$ - частично-неявная КРС

Схема Кранка-Никольсона (частично неявная)

$$\frac{f_{i,n+1} - f_{i,n}}{\Delta t} + u\frac{f_{i+1,n+1} - f_{i-1,n+1}}{4\Delta x} + u\frac{f_{i+1,n} - f_{i-1,n}}{4\Delta x} =$$

$$= a\frac{f_{i+1,n+1} + f_{i-1,n+1} - 2f_{i,n+1}}{2\Delta x^2} + a\frac{f_{i+1,n} + f_{i-1,n} - 2f_{i,n}}{2\Delta x^2}$$

Эта схема также являются абсолютно устойчивой и разрешается методом прогонки.

Главном недостатком этих схем является то, что неявные схемы приводят к бесконечной скорости распространения возмущения. Для полностью явной схемы возмущение всегда распространяется за любое время Δt на расстояние Δx в соседнюю узловую точку.

Но для неявных схем (поскольку в ней все функции на n+1 рассматриваются одновременно) возможно распределяется на расстояние l -до границ расчетной сетки.

Явные схемы для уравнения диффузии не обладают таким свойством.

Уравнение конвективного переноса предполагает распределение возмущения с конечной скоростью и поэтому для уравнения конвекции предпочтительнее выбирать явные конечно-разностные схемы, а для уравнения диффузии неявные.

В случае, если уравнение включает и конвективные и дифференциальные члены, можно воспользоватся принципом расщепления.